

Fraktalna analiza spiralnih trajektorija nekih dinamičkih sustava

Vesna Županović

"Pravac je potpuna negacija ravnine, dok je krivulja potencijalno ravnina i u sebi sadrži bit ravnine."

Vasilij Kandinski 1926.

Iz predgovora knjige

Claude Tricot: *Curves and Fractal Dimensions*.

Predgovor je napisao Michel Mendès France.

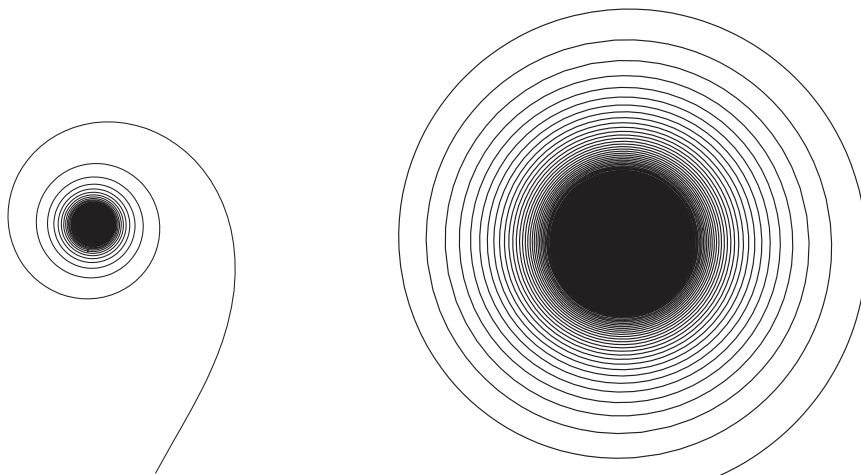


Figure 1: Spirale $r = \varphi^{-1/2}$ i $r = 5\varphi^{-1/2}$

Sadržaj predavanja:

1. Ravninska vektorska polja
2. Hopf-Takensova bifurkacija
3. Box dimenzija i sadržaj Minkowskog
4. Klasifikacija spirala
5. Nedegenerirane spirale
6. Degenerirane spirale
7. Fraktalna analiza Hopf-Takensove bifurkacije
8. Box dimenzije spiralnih trajektorija nekih vektorskih polja u \mathbb{R}^3
9. Fraktalne dimenzije u dinamici

Ravninska vektorska polja

D. Žubrinić, V. Županović, Fractal analysis of spiral trajectories of some planar vector fields, Bulletin des Sciences Mathématiques, 129/6 (2005), 457-485.

X vektorsko polje u ravnini, $X(p) = 0$, p
singularitet

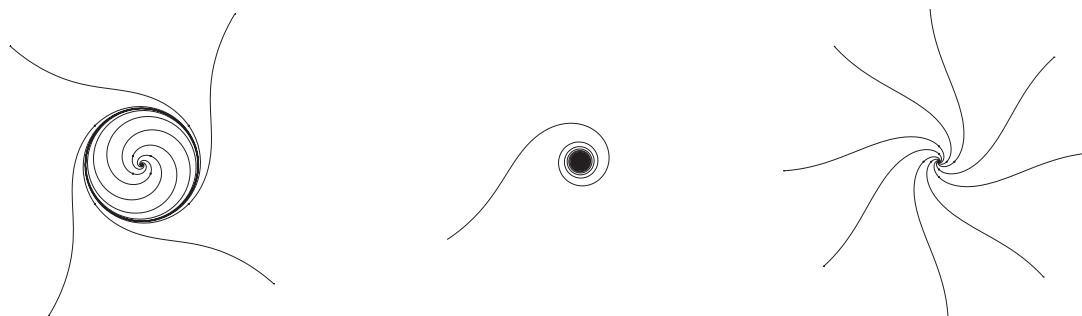


Figure 2: granični ciklus, slabi fokus i jaki fokus

Jaki fokus: matrica linearnog dijela vektorskog polja ima svojstvene vrijednosti s realnim i imaginarnim dijelom različitim od nule.

Slabi fokus: svojstvene vrijednosti su čisto imaginarne i različite od nule.

Pitanje:

Možemo li uzeti jednostavnije vektorsko polje koje ima isti topološki tip u okolini singulariteta?

Odgovor:

Da, uzimamo normalnu formu.

Najjednostavniji slučaj:

hiperboličko vektorsko polje, a to je vektorsko polje koje nema svojstvenih vrijednosti na imaginarnoj osi. Normalna forma je linearni dio.

Ostali slučajevi:

normalna forma uključuje linearni dio, ali i neke članove višeg stupnja.

Hopf-Takensova bifurkacija

Hopfova bifurkacija

Standardni model u kojem se javlja Hopfova bifurkacija

$$X = (-y + a_0x + x(x^2 + y^2)) \frac{\partial}{\partial x} + (x + a_0y + y(x^2 + y^2)) \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + a_0x + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + a_0y + y(x^2 + y^2). \end{cases} \quad (1)$$

U polarnim koordinatama

$$\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 + a_0), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

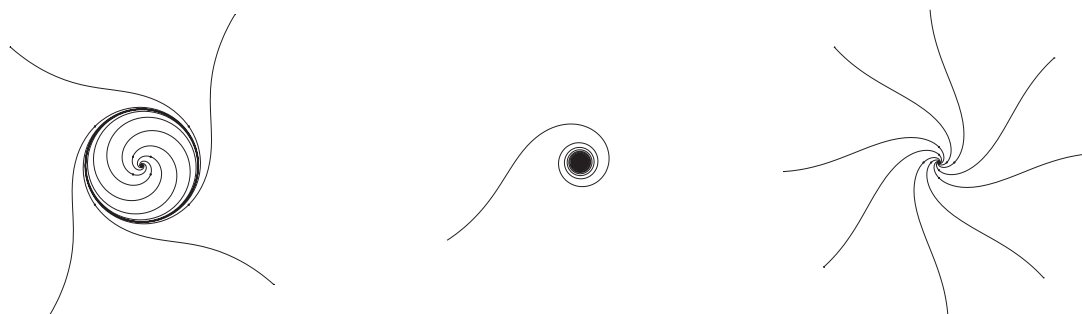


Figure 3: $a_0 < 0$, $a_0 = 0$, $a_0 > 0$

Hopf-Takensova bifurkacija

X r -parametarska familija ravninskih vektorskih polja, $X(0) = 0$.

Za $a_0 = \dots = a_{r-1} = 0$ X ima svojstvene vrijednosti na imaginarnoj osi i one su različite od nule.

Takens F., *Unfoldings of certain singularities of vector fields: Generalized Hopf bifurcations*, J. Differential Equations, 14 (1973) 476–493

X ima iste fazne portrete i bifurkacije kao $X_+^{(l)}$ ili $X_-^{(l)}$, pri čemu je

$$X_{\pm}^{(l)} = \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) \pm \left((x^2 + y^2)^l + a_{l-1}(x^2 + y^2)^{l-1} + \dots + a_0 \right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$(a_0, \dots, a_{l-1}) \in \mathbb{R}^l$, normalna forma od X .

Standardna poopćena Hopfova bifurkacija ili standardna Hopf-Takensova bifurkacija

U polarnim koordinatama

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(r^{2l} + \sum_{i=0}^{l-1} a_i r^{2i}), \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{cases} \quad (2)$$

Slučaj $l = 2$

$$\begin{cases} \dot{r} &= r(r^4 + a_1 r^2 + a_0), \\ \dot{\varphi} &= 1. \end{cases}$$

Fiksiramo $a_1 = -2$ i promatramo a_0 kao bifurkacijski parametar.

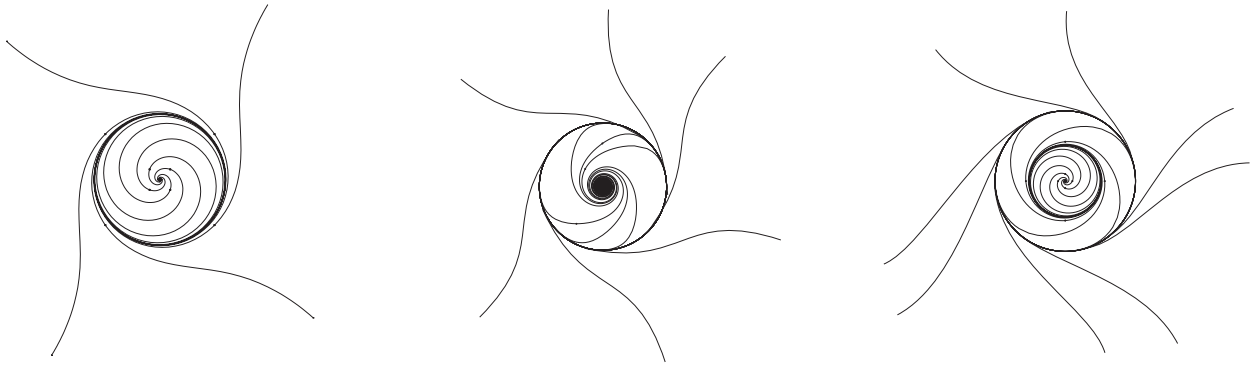


Figure 4: $a_0 < 0$, $a_0 = 0$, $a_0 \in (0, 1)$

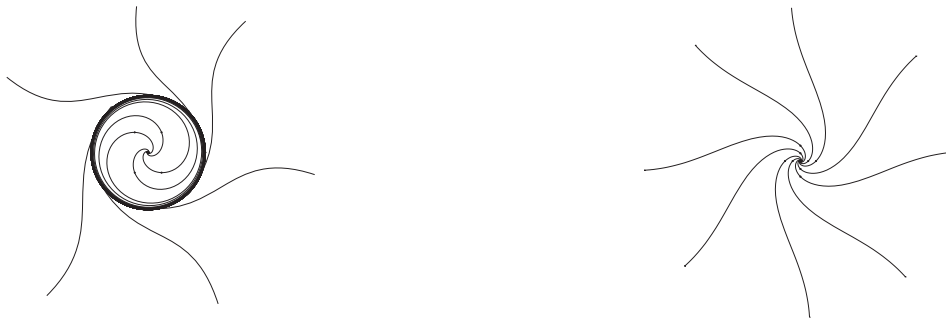


Figure 5: $a_0 = 1$, $a_0 > 1$

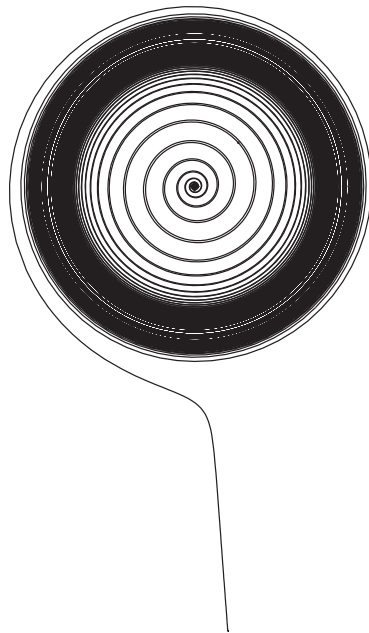


Figure 6: $\dot{r} = r(r - \frac{3}{4})(r + \frac{3}{4})^4$, $\dot{\varphi} = 1$.

Box dimenzija i sadržaj Minkowskog

$A \subset \mathbb{R}^N$ ograničen,

kobasica Minkowskog radijusa ε oko A : ε -okolina od A , $A_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^N : d(y, A) < \varepsilon\}$.

Radijalna kobasica Minkowskog $A_{\varepsilon, rad}$ oko A definirana je na isti način koristeći funkciju radijalne udaljenosti $d_{rad}(x, A)$ koja je jednaka Euklidskoj udaljenosti od x do skupa $A \cap \{tx : t \geq 0\}$, ako je presjek je neprazan, inače je ∞ . *Donji*

s-dimenzionalni sadržaj Minkowskog od A , $s \geq 0$:

$$\mathcal{M}_*^s(A) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|A_\varepsilon|}{\varepsilon^{N-s}}$$

Analogno za *gornji s-dimenzionalni sadržaj Minkowskog* $\mathcal{M}^{*s}(A)$.

$$\underline{\dim}_B A := \inf\{s \geq 0 : \mathcal{M}_*^s(A) = 0\},$$
$$\overline{\dim}_B A := \inf\{s \geq 0 : \mathcal{M}^{*s}(A) = 0\}.$$

Ako je $\mathcal{M}_*^s(A) = \mathcal{M}^{*s}(A)$ za neki s , tu vrijednost

zovemo *s-dimenzionalni sadržaj Minkowskog* od A , oznaka $\mathcal{M}^s(A)$.

Ako za neki $d \geq 0$ imamo $\mathcal{M}^d(A) \in (0, \infty)$, onda kažemo da je skup A *Minkovski izmjeriv* (vrijedi $d = \dim_B A$).

Radijalni s-dimenzionalni sadržaj Minkowskog:

$$\mathcal{M}_*^s(A, rad) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|A_{\varepsilon, rad}|}{\varepsilon^{N-s}},$$

$$\mathcal{M}^{*s}(A, rad) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|A_{\varepsilon, rad}|}{\varepsilon^{N-s}}.$$

Ako za neki $s \geq 0$ imamo $\mathcal{M}^s(A, rad) \in (0, \infty)$, onda kažemo da je skup A is *radijalno Minkovski izmjeriv*.

Ako je d -dimenzionalni sadržaj Minkowskog od A degeneriran (0 ili ∞), pri čemu je $d = \dim_B A$, onda radimo s poopćenim sadržajem Minkowskog.

Tražimo eksplicitne pozitivne *baždarne funkcije* $h_i : [0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, nepadajuće, $h_i(0) = 0$ i

takve da su odgovarajući *poopćeni sadržaji*

Minkowskog

$$\mathcal{M}_*(h_1, A) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|A_\varepsilon|}{\varepsilon^N} \cdot h_1(\varepsilon),$$

$$\mathcal{M}^*(h_2, A) := \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|A_\varepsilon|}{\varepsilon^N} \cdot h_2(\varepsilon),$$

nedegenerirani. Slično je za radijalni poopćeni sadržaj Minkowskog

$$\mathcal{M}_*(h_1, A, rad) := \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|A_{\varepsilon, rad}|}{\varepsilon^N} \cdot h_1(\varepsilon),$$

i $\mathcal{M}^*(h_2, A, rad)$.

Primjer — dužina duljine l je skup A

Lebesgueova mjera kobasice Minkowskog u \mathbb{R}^2

$$|A_\varepsilon| = 2l\varepsilon + \varepsilon^2 \pi$$

$$\mathcal{M}^s(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|A_\varepsilon|}{\varepsilon^{2-s}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2l\varepsilon^{s-1} + \pi\varepsilon^s)$$

$$s = 1 \quad \mathcal{M}^1(A) = 2l$$

$$s < 1 \quad \mathcal{M}^s(A) = \infty$$

$$s > 1 \quad \mathcal{M}^s(A) = 0$$

Klasifikacija spirala

Klasifikacija:

(a) spirale *tipa fokusa i tipa graničnog ciklusa*;

$r = f(\varphi)$, $f(\varphi) \rightarrow 0$ spirala tipa fokusa

$r = 1 - f(\varphi)$ spirala tipa graničnog ciklusa

(b) spirale *tipa potencije, eksponencijalne i logaritamske spirale*;

$r = \varphi^{-\alpha}$, $r = e^{-c\varphi}$, $r = (\log \varphi)^{-1}$

$r = 1 - \varphi^{-\alpha}$, $r = 1 - e^{-c\varphi}$, $r = 1 - (\log \varphi)^{-1}$

(c) spirale s *nedegeneriranim i degeneriranim* sadržajem Minkowskog.

$r = \varphi^{-1}$, $r = \varphi^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$

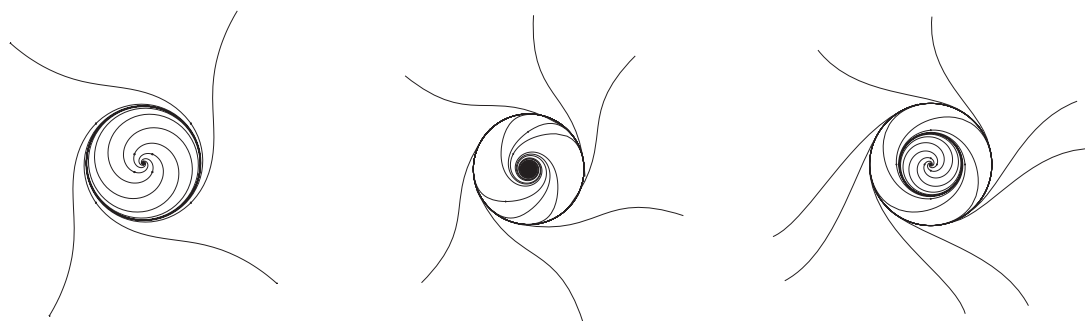


Figure 7: Spirale tipa fokusa i tipa graničnog ciklusa

Nedegenerirane spirale

Spirale tipa fokusa (točka akumulacije je ishodište): graf Γ funkcije $r = f(\varphi)$, $\varphi \geq \varphi_1$, u polarnim koordinatama, t.d.

$$\left\{ \begin{array}{l} f : [\varphi_1, \infty) \rightarrow (0, \infty), f(\varphi) \rightarrow 0 \text{ kad } \varphi \rightarrow \infty, \\ f \text{ *radijalno padajuća*, tj. za bilo koji } \varphi \geq \varphi_1, \\ \mathbb{N} \ni k \mapsto f(\varphi + 2k\pi) \text{ je padajuća} \end{array} \right.$$

Primijetimo: funkcija f ne mora biti neprekinuta (tako nastala spirala može biti sastavljena od koncentričnih kružnica koje teže u ishodište).

Teorem 1 (spirale tipa potencije i fokusa)

Pretpostavke: $f : [\varphi_1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ izmjeriva, radijalno padajuća, takva da za neke pozitivne \underline{m} i \bar{m} vrijedi

$$\underline{m} \varphi^{-\alpha} \leq f(\varphi) \leq \bar{m} \varphi^{-\alpha}$$

za $\varphi \geq \varphi_1 > 0$; postoje pozitivni \underline{a} i \bar{a} takvi da za $\varphi \geq \varphi_1$ vrijedi,

$$\underline{a} \varphi^{-\alpha-1} \leq f(\varphi) - f(\varphi + 2\pi) \leq \bar{a} \varphi^{-\alpha-1}.$$

Označimo s Γ graf $r = f(\varphi)$. Ako je $\alpha \in (0, 1)$ onda:

$$d := \dim_B(\Gamma, rad) = \frac{2}{1+\alpha},$$

$$\underline{M} \leq \mathcal{M}_*^d(\Gamma, rad) \leq \mathcal{M}^{*d}(A, rad) \leq \overline{M}$$

gdje su \underline{M} i \overline{M} konstante koje ne ovise o početnom kutu φ_1 :

$$\underline{M} := \pi \underline{m}^2 \left(\frac{2}{\underline{a}} \right)^{2\alpha/(1+\alpha)} + \frac{2\underline{m}}{1-\alpha} \left(\frac{\underline{a}}{2} \right)^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

$$\overline{M} := \pi \overline{m}^2 \left(\frac{2}{\overline{a}} \right)^{2\alpha/(1+\alpha)} + \frac{2\overline{m}}{1-\alpha} \left(\frac{\overline{a}}{2} \right)^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}.$$

Teorem 2 (spirale tipa potencije i graničnog ciklusa) *Pretpostavke:* $f : [\varphi_1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ kao u prethodnom teoremu, α pozitivan realan broj; Γ spirala tipa graničnog ciklusa definirana s $r = 1 - f(\varphi)$. Tada

$$d := \dim_B(\Gamma, rad) = \frac{2+\alpha}{1+\alpha},$$

$$\underline{M} \leq \mathcal{M}_*^d(\Gamma, rad) \leq \mathcal{M}^{*d}(A, rad) \leq \overline{M},$$

gdje \underline{M} i \overline{M} ne ovise o početnom kutu φ_1 :

$$\underline{M} := 2\pi \underline{m} \left(\frac{2}{\underline{a}} \right)^{\alpha/(1+\alpha)} + 2 \left(\frac{\underline{a}}{2} \right)^{1/(1+\alpha)},$$

$$\overline{M} := 2\pi \overline{m} \left(\frac{2}{\overline{a}} \right)^{\alpha/(1+\alpha)} + 2 \left(\frac{\overline{a}}{2} \right)^{1/(1+\alpha)}.$$

Korolar 1 (Usporedni kriterij za spirale tipa potencije) *Pretpostavke: $f : [\varphi_1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ apsolutno neprekinuta, $f(\varphi) \rightarrow 0$ kad $\varphi \rightarrow \infty$; i*

$$\underline{b} \varphi^{-\alpha-1} \leq |f'(\varphi)| \leq \overline{b} \varphi^{-\alpha-1}, \quad \varphi \geq \varphi_1, \quad (3)$$

pri čemu su α , \underline{b} i \overline{b} pozitivne konstante.

(a) Neka je Γ spirala definirana s $r = f(\varphi)$, $\alpha \in (0, 1)$. Tada $d := \dim_B(\Gamma, rad) = \frac{2}{1+\alpha}$ i radijalni d -dimenzionalni sadržaj Minkowskog od Γ je nedegeneriran.

(b) Neka je Γ spirala $r = 1 - f(\varphi)$, $\alpha > 0$. Tada $d := \dim_B(\Gamma, rad) = \frac{2+\alpha}{1+\alpha}$ i radijalni d -dimenzionalni sadržaj Minkowskog od Γ je nedegeneriran.

(c) *Specijalno, zaključci iz (a) i (b) vrijede ako je f klase C^1 i postoji*

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{f'(\varphi)}{(\varphi^{-\alpha})'} \in (0, \infty). \quad (4)$$

NAPOMENA 1. Spirala $r = \varphi^{-\alpha} + \varphi^{-\beta}$, $\varphi \geq \varphi_1 > 0$, gdje je $\alpha \in (0, 1)$ i $\beta > \alpha$, ima radijalnu box dimenziju jednaku $\frac{2}{1+\alpha}$, isto kao spirala $r = \varphi^{-\alpha}$. Analogno, radijalna box dimenzija spirale $r = 1 - \varphi^{-\alpha} - \varphi^{-\beta}$ je $\frac{2+\alpha}{1+\alpha}$ (isto kao spirala $r = 1 - \varphi^{-\alpha}$), pri čemu tražimo samo $0 < \alpha < \beta$.

Teorem 3 (Minkowski izmjerive spirale)

Pretpostavke: $f : [\varphi_1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ padajuća funkcija klase C^2 i $\varphi_1 > 0$; za svaki $\varphi_0 > \varphi_1$ postoje pozitivni brojevi $\underline{m}(\varphi_0)$, $\overline{m}(\varphi_0)$, $D_1(\varphi_0)$ and $D_2(\varphi_0)$ takvi da za sve $\varphi \geq \varphi_0$,

$$\underline{m}(\varphi_0) \varphi^{-\alpha} \leq f(\varphi) \leq \overline{m}(\varphi_0) \varphi^{-\alpha}$$

$$D_1(\varphi_0) \varphi^{-\alpha-1} \leq |f'(\varphi)| \leq D_2(\varphi_0) \varphi^{-\alpha-1},$$

i postoji pozitivna konstanta D_3 takva da je $|f''(\varphi)| \leq D_3\varphi^{-\alpha}$; takodjer pretpostavimo da

$$\begin{aligned}\lim_{\varphi \rightarrow \infty} \underline{m}(\varphi) &= \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \overline{m}(\varphi) =: m, \\ \lim_{\varphi \rightarrow \infty} D_1(\varphi) &= \lim_{\varphi \rightarrow \infty} D_2(\varphi) =: D.\end{aligned}$$

Ako je Γ spirala $r = f(\varphi)$ tipa fokusa (pretpostavljamo da je $\alpha \in (0, 1)$) i definiramo $d := 2/(1 + \alpha)$) ili spirala $r = 1 - f(\varphi)$ tipa graničnog ciklusa (pretpostavljamo da je $\alpha > 0$) i definiramo $d := (2 + \alpha)/(1 + \alpha)$). Tada $\dim_B \Gamma = \dim_B(\Gamma, rad) = d$, spirale su Minkowski izmjerive u klasičnom i radijalnom smislu, što više,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^d(\Gamma) &= \mathcal{M}^d(\Gamma, rad) \\ &= \begin{cases} \pi m^2 (\pi D)^{-2\alpha/(1+\alpha)} + \frac{2m}{1-\alpha} (\pi D)^{-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \\ 2\pi (\pi D)^{-\alpha/(1+\alpha)} + 2(\pi D)^{1/(1+\alpha)}. \end{cases}\end{aligned}$$

NAPOMENA 2. Graf spirale $r = \varphi^{-\alpha} + \varphi^{-\beta}$, $\varphi \geq \varphi_1 > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, $\beta > \alpha$, je Minkowski izmjeriv u klasičnom i radijalnom smislu i vrijedi $\mathcal{M}^d(\Gamma) = \mathcal{M}^d(\Gamma, rad)$, pri čemu je $d := 2/(1 + \alpha)$. Isto kao za $r = \varphi^{-\alpha}$.

Degenerirane spirale

Teorem 4 (Degenerirani sadržaji Minkowskog)

(a) Neka je Γ spirala tipa fokusa definirana s $r = \varphi^{-1}$, $\varphi \geq \varphi_1$.

Tada $\dim_B \Gamma = \dim_B(\Gamma, rad) = 1$ i $\mathcal{M}^1(\Gamma, rad) = \infty$.

Pomoću baždarne funkcije $h(\varepsilon) := \varepsilon(\log(1/\varepsilon))^{-1}$ imamo $\mathcal{M}(h, \Gamma, rad) = 1$.

(b) Neka je Γ spirala tipa graničnog ciklusa definirana s $r = 1 - e^{-\varphi}$, $\varphi \geq \varphi_1 > 0$.

Tada $\dim_B \Gamma = \dim_B(\Gamma, rad) = 1$ i $\mathcal{M}^1(\Gamma, rad) = \infty$.

Pomoću baždarne funkcije $h(\varepsilon) := \varepsilon(\log(1/\varepsilon))^{-1}$

$$\text{imamo } \mathcal{M}(h, \Gamma, rad) = 2.$$

Fraktalna analiza Hopf-Takensove bifurkacije

Spirala $r = f(\varphi)$ tipa fokusa je usporediva sa spiralom $r = \varphi^{-\alpha}$ tipa potencije ako je

$$\underline{C}\varphi^{-\alpha} \leq f(\varphi) \leq \overline{C}\varphi^{-\alpha}$$

za neke $\underline{C}, \overline{C} > 0$ i za svaki $\varphi \in [\varphi_1, \infty)$.

Analogno za spirale s negativnom orijentacijom, što znači $\underline{C}|\varphi|^{-\alpha} \leq f(\varphi) \leq \overline{C}|\varphi|^{-\alpha}$ za $\varphi \in (-\infty, \varphi_1]$.

Spirala $r = f(\varphi)$ tipa fokusa je usporediva s eksponencijalnom spiralom $r = e^{-\beta\varphi}$ ako je

$$\underline{C}e^{-\beta\varphi} \leq f(\varphi) \leq \overline{C}e^{-\beta\varphi}$$

za neke $\underline{C}, \overline{C} > 0$ i $\beta > 0$, i za svaki $\varphi \in [\varphi_1, \infty)$.

Analogno za spirale s negativnom orijentacijom, što znači, za $\varphi \in (-\infty, \varphi_1]$ i $\beta < 0$.

Teorem 5 (fokus)

Γ dio trajektorije sustava (2) blizu ishodišta.

(a) $a_0 \neq 0$, tada je spirala Γ eksponencijalnog tipa i usporediva je s $r = e^{a_0 \varphi}$, prema tome

$$\dim_B \Gamma = \dim_B(\Gamma, rad) = 1.$$

(b) k je fiksiran, $1 \leq k \leq l$, $a_l = 1$ i

$a_0 = \dots = a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$. Tada je Γ usporediva sa spiralom $r = \varphi^{-1/2k}$ i

$$d := \dim_B \Gamma = \dim_B(\Gamma, rad) = \frac{4k}{2k + 1}.$$

Γ je Minkowski izmjeriva u klasičnom i radijalnom smislu i $\mathcal{M}^d(\Gamma) = \mathcal{M}^d(\Gamma, rad)$ je eksplisitna konstanta.

Teorem 6 (Granični ciklus) *Pretpostavimo da sustav (2) ima granični ciklus $r = a$ multipliciteta m , $1 \leq m \leq l$; Γ_1 i Γ_2 su dijelovi dviju trajektorija sustava (2) u blizini graničnog ciklusa izvana i iznutra, respektivno.*

(a) *Tada su Γ_1 i Γ_2 usporedive s eksponencijalnim spiralama $r = a \pm e^{-\beta\varphi}$ ako je $m = 1$, $\beta \neq 0$ (ovisi samo o koeficijentima a_i , $0 \leq i \leq l - 1$);*

(b) *Γ_1 i Γ_2 su usporedive sa spiralama tipa potencije $r = a \pm \varphi^{-1/(m-1)}$ ako je $m > 1$.*

U oba slučaja imamo

$$d := \dim_B \Gamma_i = \dim_B(\Gamma_i, rad) = 2 - \frac{1}{m}, \quad i = 1, 2.$$

Za $m = 1$ vrijedi

$$\mathcal{M}^d(h, \Gamma_i) = \mathcal{M}^d(h, \Gamma_i, rad) = 2/\beta, \quad i = 1, 2,$$

gdje je $h(\varepsilon) := \varepsilon(\log(1/\varepsilon))^{-1}$.

Za $m > 1$ spirale su Minkowski izmjerive u klasičnom i radijalnom smislu i

$$\mathcal{M}^d(\Gamma_i) = \mathcal{M}^d(\Gamma_i, rad), \quad i = 1, 2.$$

Primjer $l = 2$

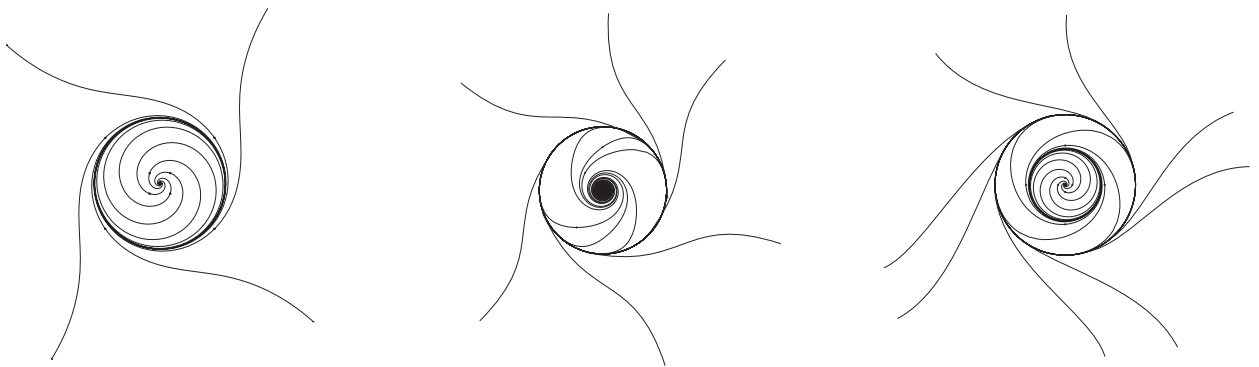


Figure 8: $a_0 < 0, a_0 = 0, a_0 \in (0, 1)$

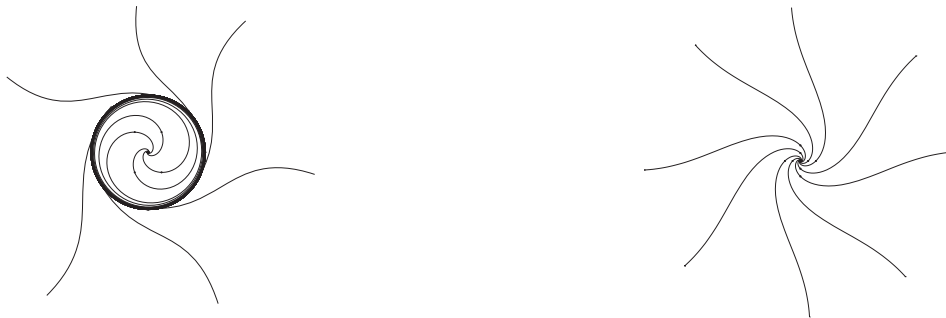


Figure 9: $a_0 = 1, a_0 > 1$

(1) $a_0 < 0$ sve box dimenzije su jednake 1
(trajektorije su eksponencijalnog tipa)

(2) $a_0 = 0$ $\dim_B \Gamma_1 = 4/3$, trajektorije tipa
potencije, Γ_1 je dio bilo koje trajektorije blizu
ishodišta.

Dio trajektorije blizu graničnog ciklusa $r = \sqrt{2}$ ima
box dimenziju jednaku 1 (eksponencijalni slučaj).

(3) $a_0 \in (0, 1)$ imamo dva granična ciklusa
multipliciteta jedan, sve box dimenzije jednake su 1
(eksponencijalni slučaj).

(4) $a_0 = 1$ imamo granični ciklus $r = 1$
multipliciteta dva, sve trajektorije blizu graničnog
ciklusa (iznutra ili izvana) imaju box dimenzije
jednake $3/2$ (spirale tipa potencije).

Trajektorije unutar graničnog ciklusa, ali blizu
ishodišta, imaju box dimenzije jednake 1
(eksponencijalni slučaj).

(5) $a_0 > 1$ box dimenzije svih trajektorija su

jednake 1 (eksponencijalni slučaj).

Ideja

Ovdje smo radili samo sa sustavima koji imaju eksplicitna rješenja.

Moguće je znati koliko je "gusta" spirala računajući njezinu box dimenziju čak i za sustave za koje ne znamo eksplicitno rješenje. U tim slučajevima Poincaréovo preslikavanje $P(x)$ (first return map) i funkcija pomaka (displacement function) $V(x) := x - P(x)$ daju nam informacije o "gustoći" spirale.

Primjer - ne znamo box dimenziju

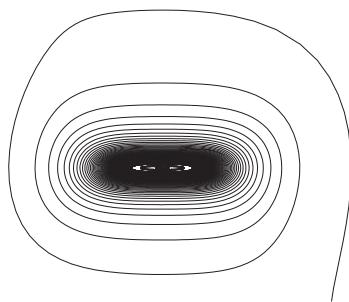


Figure 10: $\dot{x} = y + xy^2$, $\dot{y} = -x^3$

Potrebno je prije proučiti box dimenzije
1-dimenzionalnih diskretnih dinamičkih sustava.

N. Elezović, V. Županović, D. Žubrinić, **Box
dimension of trajectories of some discrete
dynamical systems**, rad u pripremi

Ujedno proučavamo bifurkacije 1-dimenzionalnih
diskretnih dinamičkih sustava. Što se događa s box
dimenzijom i sadržajem Minkowskog kad nastupi
bifurkacija sedlo-čvor i bifurkacija udvostručenja
perioda? Primjer-Feigenbaumovo preslikavanje.

Box dimenzije spiralnih trajektorija nekih vektorskih polja u \mathbb{R}^3

D. Žubrinić, V. Županović, Fractal analysis of spiral trajectories of some vector fields in \mathbb{R}^3 , Comptes Rendus Mathématique

Pretpostavljamo da su sve spirale iz \mathbb{R}^3 sadržane u dvodimensionalnim plohama.

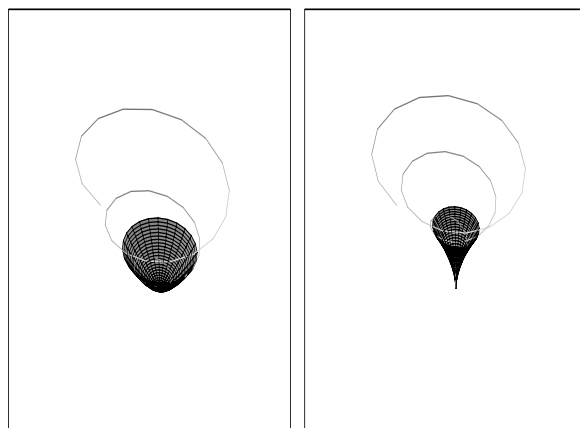


Figure 11: Lipschitzova i Hölderova spirala tipa fokusa

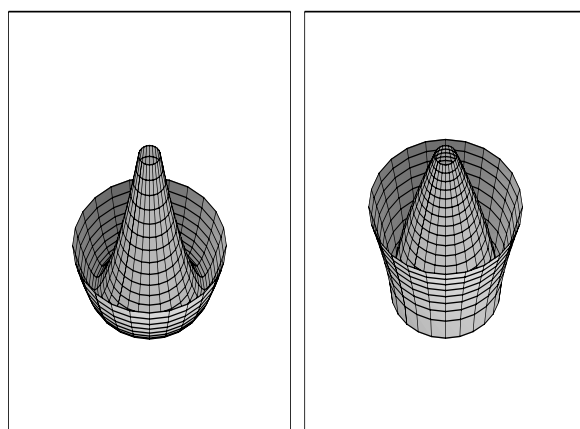


Figure 12: Plohe koje sadržavaju Lipschitzove i Hölderove spirale tipa graničnog ciklusa

Četiri tipa spirala u \mathbb{R}^3 :

- Lipschitzove spirale tipa fokusa,
- Lipschitzove spirale tipa graničnog ciklusa,
- Hölderove spirale tipa fokusa,
- Hölderove spirale tipa graničnog ciklusa.

Osnovno sredstvo: box dimenzija i nedegeneracija skupa se ne mijenja djelovanjem bi-Lipschitzovog preslikavanja.

Specijalni slučaj normalne forme kad linearni dio (u pravokutnim koordinatama) ima par čisto imaginarnih svojstvenih vrijednosti i jednostruku svojstvenu vrijednost nula.

$$\begin{aligned} \dot{r} &= c_1 r^3 + \dots + c_m r^{2m+1} \\ \dot{\varphi} &= 1 \\ \dot{z} &= d_2 z^2 + \dots + d_n z^n \end{aligned} \tag{5}$$

Sustav (5) je nastao iz polinomijalnog sustava u pravokutnim koordinatama.

Teorem 7 (fokus u \mathbb{R}^3)

Neka je Γ dio trajektorije sustava (5) u blizini ishodišta u \mathbb{R}^3 . Neka su k i p najmanji brojevi takvi da je $c_k \neq 0$ i $d_p \neq 0$. Pretpostavimo $c_k d_p > 0$.

Ako je $2k + 1 \geq p$, onda je Γ Lipschitzova spirala i

$$\dim_B \Gamma = 2 - \frac{2}{2k + 1},$$

a ako je $2k + 1 < p$, onda je Γ Hölderova spirala i

$$\dim_B \Gamma = 2 - \frac{2k + p - 1}{2kp}.$$

Sve spirale Γ iz teorema su Minkowski nedegenerirane, tj. za $d := \dim_B \Gamma$ vrijedi $\mathcal{M}_^d(\Gamma)$, $\mathcal{M}^{*d}(\Gamma) \in (0, \infty)$.*

Teorem 8 (granični ciklus u \mathbb{R}^3)

Pretpostavimo da (5) ima granični ciklus $r = a$ multipliciteta j , $1 \leq j \leq m$. Neka su Γ_1 i Γ_2 dijelovi dviju trajektorija od (5) u blizini graničnog ciklusa izvana i iznutra, respektivno.

Ako je $j = 1$ onda

$$\dim_B \Gamma_i = 1, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Ako je $j > 1$ onda za $j \geq p$ imamo Lipschitzove spirale i

$$\dim_B \Gamma_i = 2 - \frac{1}{j}, \quad i = 1, 2,$$

dok za $j < p$ imamo Hölderove spirale i

$$\dim_B \Gamma_i = 2 - \frac{1}{p}, \quad i = 1, 2.$$

Sve spirale Γ iz teorema (osim u (6), gdje je $\mathcal{M}^1(\Gamma) = \infty$) su Minkowski nedegenerirane.

Uvodimo klasu sustava u \mathbb{R}^3 kod kojih dimenzije trajektorija ovise i o koeficijentima sustava, a ne samo o eksponentima kao do sada!

Primjer

Svako spiralno rješenje sustava

$$\dot{r} = a_1 r z, \quad \dot{\varphi} = 1, \quad \dot{z} = b_2 z^2 \quad (7)$$

ima box dimenziju

$$\dim_B \Gamma = \frac{2}{1 + a_1/b_2}, \quad (8)$$

sadržaj Minkowskog je nedegeneriran.

Samo jedna od dviju projekcija spirale Γ na horizontalnu i vertikalnu ravninu ima box dimenziju jednaku $\dim_B \Gamma$.

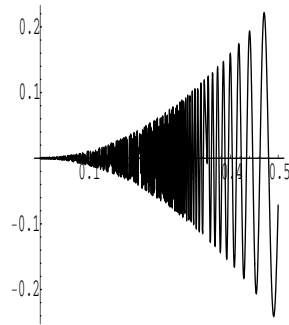


Figure 13: (2, 4)-chirp

Hölderova spirala tipa fokusa,

$$r = \varphi^{-\alpha}, z = r^{\beta}$$

$$\alpha \in (0, 1), \beta \in (0, 1), \varphi \in [\varphi_1, \infty).$$

Projekcija na ravninu (y, z) je

$$y = z^{1/\beta} \sin(z^{-1/\alpha\beta}).$$

Box dimenzija grafa ovakve funkcije (C. Tricot) jednaka je

$$2 - \frac{\alpha(1 + \beta)}{1 + \alpha\beta}.$$

Ovakve funkcije, chirps, su proučavane i u

Pašić M., Županović V., Some metric-singular properties of the graph of solutions of the one-dimensional p -Laplacian, *Electronic J. of Differential Equations*, 60, 2004(2004), 1–25.

ali u drukčijoj situaciji.

Fraktalne dimenzije u dinamici

V. Županović, D. Žubrinić, *Fractal dimensions in dynamics*, in *Encyclopedia of Mathematical Physics*, Jean-Pierre Francoise, Greg Naber, Sheung Tsun Tsou (editors), Elsevier Academic Press, 2006

Postoje u literaturi i mnoga druga imena za box dimenziju (često se to odnosi samo na gornju box dimenziju):

the Cantor-Minkowski order, Minkowski dimension, Bouligand dimension, Borel logarithmic rarefaction, Besicovitch-Taylor index, entropy dimension, Kolmogorov dimension, fractal dimension, and limit capacity.

Druge fraktalne dimenzije važne u dinamici:

Hausdorff dimension, Ljapunov dimension, Rényi spectrum for dimensions, correlation dimension, information dimension, Hentschel-Procaccia spectrum for dimensions, packing dimension, and effective fractal dimension.

Od 1970.g. termodinamički formalizam, teorija koju su razvili Sinai, Ruelle i Bowen, dala je Hausdorffovu dimenziju za Smaleovu potkovu i mnoge rezultate o Hausdorffovoj dimenziji Julia i Mandelbrotovih skupova.

Od 1980.g. fizičari su počeli ocjenjivati i računati fraktalne dimenzije neobičnih atraktora (Lorenz, Henon,...). Postoje i ocjene fraktalnih dimenzija za atraktore beskonačno-dimenzionalnih dinamičkih sustava.

Mi imamo drukčiji pristup, računamo box dimenziju trajektorije u odnosu na bifurkaciju. Na taj način dobro poznate bifurkacije možemo promatrati na novi način kroz fraktalnu analizu.

Napravili smo to za Hopf-Takensovu bifurkaciju. U \mathbb{R}^3 smo počeli iz početka, jer nisu bile poznate nikakve box dimenzije spirala. Trenutno radimo 1-dimenzionalne diskretne sustave, bifurkaciju sedlo-čvor i bifurkaciju udvostručenja perioda.