

CHIRPOVI

Maja Resman

12. listopada 2009.

- 1 UVOD
- 2 FRAKTALNA ANALIZA CHIRP FUNKCIJA
- 3 GENERALIZIRANI CHIRPOVI
- 4 ZAHVALA

ŠTO JE CHIRP?

DEFINICIJA

Standardni (α, β) -chirp je funkcija oblika

$$y(x) = x^\alpha \sin(x^{-\beta})$$

ili

$$y(x) = x^\alpha \cos(x^{-\beta}),$$

definirana na poluotvorenom intervalu $I = (0, 1]$, pri čemu su

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}; \quad \alpha, \beta > 0.$$

MOTIVACIJA

Funkcije

$$y_1(x) = x^\alpha \sin(x^{-\beta}), \quad y_2(x) = x^\alpha \cos(x^{-\beta})$$

su linearno nezavisna rješenja sljedeće diferencijalne jednačbe drugog reda:

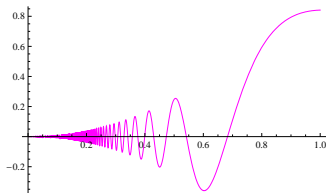
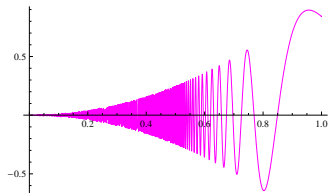
$$y''(x) + \frac{\beta - 2\alpha + 1}{x} y'(x) + \left(\frac{\beta^2}{x^{2\beta+2}} - \frac{\alpha(\beta - \alpha)}{x^2} \right) y(x) = 0.$$

MOTIVACIJA

- *chirpom* se naziva signal kod kojeg *frekvencija raste ili opada s vremenom**
- u našoj definiciji specijalan chirp: sinusoidalni signal, ciklus - jedan zavoj sinusoide
- upotreba: bežične telekomunikacije, akustika, optika, radari,...

* frekvencija je recipročna vrijednost vremena koje signal treba da prođe jedan ciklus

PRIMJERI

Primjer 1.a) (2,3)-chirp, $y(x) = x^2 \sin(x^{-3})$ Primjer 2.a) (2,7)-chirp, $y(x) = x^2 \sin(x^{-7})$ 

Uočimo razliku u brzini pada frekvencije kod prvog i drugog signala!

★ Zvučne chirpove izradila je *dipl. ing. Sanja Grubeša* sa
Zavoda za elektroakustiku FER-a.

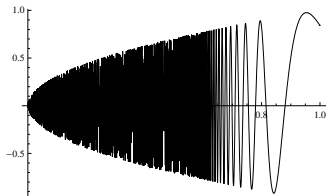
Hvala!

ODAKLE NAZIV "CHIRP"?

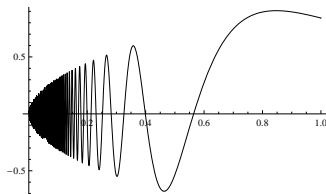


engl. *chirp* = cvrkut

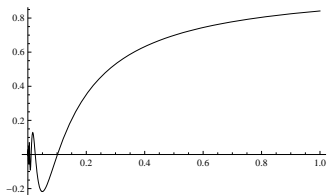
KOLIKA JE DULJINA GRAFA CHIRP FUNKCIJE?



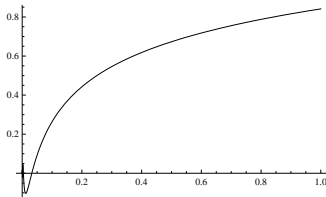
Primjer 1. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 9$



Primjer 2. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$



Primjer 3. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$



Primjer 4. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{3}$

KOLIKA JE DULJINA GRAFA CHIRP FUNKCIJE?

TVRDNJA

Neka je $y(x)$ kao u definiciji, $\alpha, \beta > 0$. Sa $\mathcal{L}(\Gamma(y))$ označimo *duljinu grafa funkcije y* .

Tada vrijedi:

$$\alpha > \beta \quad \implies \quad \mathcal{L}(\Gamma(y)) < +\infty$$

$$\alpha \leq \beta \quad \implies \quad \mathcal{L}(\Gamma(y)) = +\infty$$

P R O B L E M

Kako detektirati činjenicu da što je β veći, $\Gamma(y)$ više "ispunjava" ravninu?
Duljina grafa nam ne daje dovoljno preciznu informaciju!!!

BOX DIMENZIJA SKUPA U RAVNINI

DEFINICIJA (BOX DIMENZIJA)

Neka je $U \subset \mathbb{R}^2$. Za $\varepsilon > 0$ definirajmo ε -okolinu skupa U ,

$$*U_\varepsilon = \bigcup_{x \in U} B(x, \varepsilon).$$

Ako postoji limes

$$\sigma := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{A}(U_\varepsilon)}{\log \varepsilon},$$

tada definiramo *box dimenziju skupa U* kao broj

$$\dim_{\text{box}}(U) := 2 - \sigma.$$

*skup U_ε nazivamo ε -kobasicom Minkowskog skupa U

NAZIV BOX DIMENZIJA

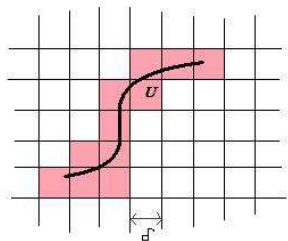
→ Zašto naziv box dimenzija ili "box-counting" dimenzija?

Gornja definicija box dimenzije ekvivalentna je sljedećoj:

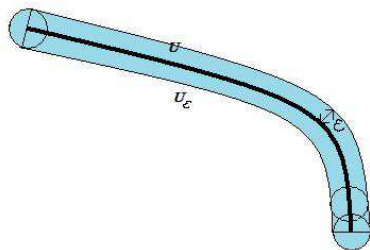
$$\dim_{\text{box}}(U) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(U)}{-\log \delta},$$

pri čemu je $N_{\delta}(U)$ broj kvadratića (engl. boxes) δ -mreže koji pokrivaju U .

Intuitivno: Što broj kvadratića potrebnih za prekrivanje brže raste smanjenjem stranice mreže, to skup više ispunjava ravninu!



pokrivanje skupa U δ -mrežom



ϵ -kobasica Minkowskog skupa U

BOX DIMENZIJA SKUPA U RAVNINI

POSLJEDICA DEFINICIJE

Ako za skup $U \subset \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$*\mathcal{A}(U_\varepsilon) \simeq \varepsilon^\sigma, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

tada je

$$\dim_{\text{box}}(U) = 2 - \sigma.$$

* postoje dvije pozitivne konstante $C_1 > 0$ i $C_2 > 0$ te $\varepsilon_0 > 0$ t.d.

$$C_1\varepsilon^\sigma \leq \mathcal{A}(U_\varepsilon) \leq C_2\varepsilon^\sigma, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

SVOJSTVA BOX DIMENZIJE

Pretpostavimo da svi spomenuti skupovi *imaju box dimenziju*.

- 1 **konačna stabilnost:** $\dim_{\text{box}}(U \cup V) = \max\{\dim_{\text{box}}(U), \dim_{\text{box}}(V)\}$
- 2 **monotonost:** $U \subset V \implies \dim_{\text{box}}(U) \leq \dim_{\text{box}}(V)$
- 3 Za svaki $U \subset \mathbb{R}^2$ je $0 \leq \dim_{\text{box}}(U) \leq 2$.
- 4 **invarijantnost na bilipschitzove transformacije**

Neka je $f : U \rightarrow f(U)$ bilipschitzovo[†] preslikavanje. Tada je

$$\dim_{\text{box}}(U) = \dim_{\text{box}}(f(U)).$$

[†] postoje konstante $C_1 > 0$ i $C_2 > 0$ t.d.

$$C_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq C_2|x - y|, \text{ za sve } x, y \in U.$$

PRIMJERI U \mathbb{R}^2

- U je **konačan skup točaka**

$$\mathcal{A}(U_\varepsilon) = K \cdot \varepsilon^2 \Rightarrow \dim_{\text{box}}(U) = 0$$

- U je **krivulja konačne duljine**

$$\mathcal{A}(U_\varepsilon) = K \cdot \varepsilon^2 + \mathcal{L}(U) \cdot \varepsilon \simeq \varepsilon \Rightarrow \dim_{\text{box}}(U) = 1$$

- U je skup **pozitivne površine** (ne-nul skup)

$$\mathcal{A}(U_\varepsilon) \simeq \mathcal{A}(U) \Rightarrow \dim_{\text{box}}(U) = 2$$

- U je **proizvoljna krivulja**

$$\text{svojstvo monotonosti i prethodni primjeri} \Rightarrow 1 \leq \dim_{\text{box}}(U) \leq 2$$

Box dimenzija je "dobra mjera"!

BOX DIMENZIJA STANDARDNOG (α, β) -CHIRPA

TVRDNJA (TRICOT*)

Box dimenzija grafa standardnog (α, β) -chirpa na intervalu $(0, 1]$ jednaka je:

$$\dim_{\text{box}}(\Gamma(y)) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } \alpha \geq \beta, \\ 2 - \frac{\alpha+1}{\beta+1}, & \text{ako je } \alpha < \beta. \end{cases}$$

Uočimo, što je β veći, graf više ispunjava ravninu, a ima i veću box dimenziju!

*Claude Tricot: Curves and fractal dimension, Springer-Verlag, Paris, 1993.

BOX DIMENZIJA STANDARDNOG (α, β) -CHIRPA

- Kako se box dimenzija odražava na zvučni signal chirpa?



$$\dim_{\text{box}}(\Gamma(y)) = 1.4$$



$$\dim_{\text{box}}(\Gamma(y)) = 1.5$$



$$\dim_{\text{box}}(\Gamma(y)) = 1.6$$



$$\dim_{\text{box}}(\Gamma(y)) = 1.9$$

*Zvučne signale izradila je dipl. ing. Sanja Grubeša sa Zavoda za elektroakustiku FER-a.

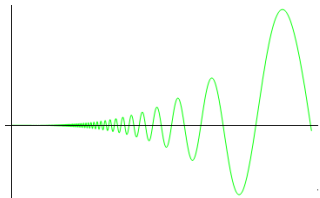
BOX DIMENZIJA STANDARDNOG (α, β) -CHIRPA

Skica dokaza:

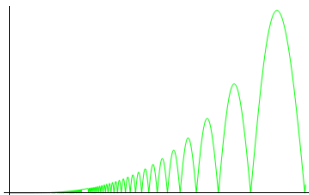
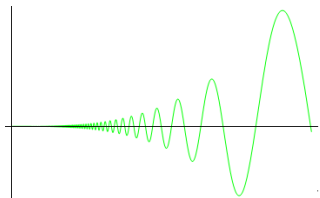
1. uspostavimo *bilipschitzovo preslikavanje* chirpa i nekog jednostavnijeg geometrijskog objekta, ovdje tzv. *geometrijskog chirpa*
2. izračunamo po definiciji *box dimenziju* jednostavnijeg objekta (ocjenom površine njegove ε -kobasice)
3. primjena *svojstva invarijantnosti na bilipschitzovu transformaciju i konačne stabilnosti box dimenzije*

1. korak dokaza:

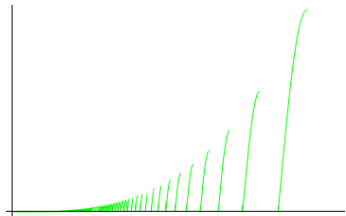
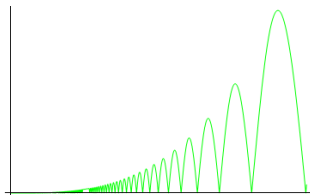
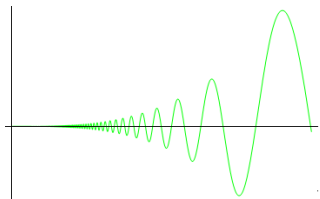
1. korak dokaza:



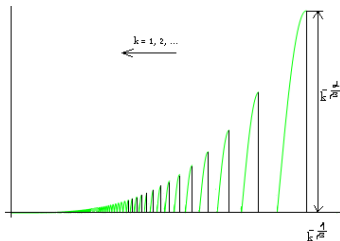
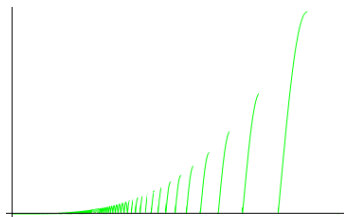
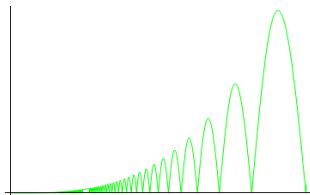
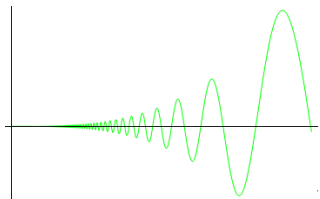
1. korak dokaza:



1. korak dokaza:



1. korak dokaza:



Cilj: naći bilipschitzovo preslikavanje na geometrijski chirp (crno!)

Primjedba uz 2. korak dokaza:

Računamo "duljinu" geometrijskog chirpa:

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Red konvergira, tj. duljina je konačna **ako i samo ako je $\alpha > \beta$** .

KAKO GENERALIZIRATI POJAM CHIRPA?

U članku

M. Pašić, D. Žubrinić, V. Županović: Oscillatory and phase dimensions of solutions of some second-order diff. equations, Bull. sci. math. (2008)

promatraju se (sa stajališta box dimenzije) generalizacije chirpova:

Funkcije

$$y(x) = p(x)S(q(x)), \quad x \in (0, 1],$$

za koje vrijedi:

- $p, q \in C^2(I) \cap C(\bar{I}), S \in C^2(\mathbb{R}),$
- $|p(x)|$ rastuća na $(0, 1],$
- $q(x)$ padajuća na $(0, 1], \quad \lim_{x \rightarrow 0} q(x) = +\infty,$
- S periodička s periodom $T,$ mijenja konveksnost/konkavnost.

PREDMET PROUČAVANJA



Ako se $p(x)$ (i njezinih nekoliko idućih derivacija) u limesu "ponaša"[‡] kao x^α , a $q(x)$ kao $x^{-\beta}$, da li vrijedi isti rezultat za dimenziju kao kod standardnog chirpa?

-Članak u pripremi:

L. Korkut, M. Resman: "Fractal oscillations of chirp-like functions"

[‡]postoji $L > 0$ t.d. vrijedi: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{p(x)}{x^\alpha} = L$, u oznaci: $p(x) \sim x^\alpha$ kad $x \rightarrow 0$.

Hvala

Zahvaljujem svom mentoru, prof. dr. sc. Darku Žubriniću, na idejama i savjetima u radu,

*prof. dr. sc. Luki Korkutu, prof. dr. sc. Mervanu Pašiću,
prof. dr. sc. Vesni Županović,*

te svima sa Zavoda za primijenjenu matematiku.

Hvala na pažnji !